CONTINUATION DES RECHERCHES SUR LA THÉORIE DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

PAR M. EULER.

I.

Ayant réduit dans mes deux Mémoires précedens toute la Théorie des fluides, tant de leur équilibre que de leur mouvement, à deux équations analytiques, la considération de ces formules paroit de la plus grande importance; puisqu'elles renferment non seulement tout ce qu'on a déjà découvert par des méthodes fort différentes & pour la plûpart peu convainquantes, tant sur l'équilibre que sur le mouvement des fluides, mais aussi tout ce qu'on peut encore désirer dans cette Science. Quelque sublimes que soient les recherches sur les fluides, dont nous sommes redevables à Mrs. *Bernoullis*, *Clairaut*, & *d'Alembert*, elles découlent si naturellement de mes deux formules générales: qu'on ne sçauroit assés admirer cet accord de leurs profondes méditations avec la simplicité des principes, d'où j'ai tiré mes deux équations, & auxquels j'ai été conduit immédiatement par les premiers axiomes de la Mécanique.

II. Quoiqu'il ne soit pas souvent à propos de donner à nos recherches une trop grande étendue, de peur qu'on ne tombe dans un calcul trop compliqué, dont on ne puisse faire l'application aux cas les plus simples, qu'avec bien de la peine, il arrive ici précisément le contraire: puisque mes équations, quelque générales qu'elles soient, ne laissent pas d'être assés simples, pour les appliquer aisément à tous les cas particuliers: & par cela même elles nous présentent des verités si uni-

univerſelles, que notre connoiſſance en tire les plus grands éclairciſſemens, qu'on puiſſe ſouhaiter. Et enſuite la plus grande univerſalité qu'elles embraſſent, n'empêche pas, qu'elles ne ſoient presque auſſi ſimples, que lorsqu'on conſidére des cas particuliers.

III. J'ai déjà remarqué que mes formules renferment toute la Théorie tant de l'équilibre que du mouvement des fluides: or, par rapport à la nature des fluides, elles s'étendent également aux fluides nommés elaſtiques, qu'à ceux qui ne ſont pas ſuſceptibles de compreſſion: & à l'égard de ceux-là, de quelque maniere que la denſité puiſſe dépendre de l'elaſticité, ſoit que ce ſoit ſelon une loi conſtante, ou variable d'une maniere quelconque. Enſuite, quelles que puiſſent être les forces accélératrices, qui agiſſent ſur les élémens du fluide, leur effet eſt auſſi compris dans lesdites formules; & enfin, de quelques forces externes que le fluide ſoit ſollicité, & quelle que ſoit la figure du canal, ou vaiſſeau, où le fluide ſe trouve, il y eſt tenu compte de toutes ces différentes circonſtances.

IV. Soit que la queſtion roule ſur l'équilibre, ou ſur le mouvement d'un fluide; & qu'on demande, ou la viteſſe & direction de chaque particule, ou les forces, que le fluide exerce ſur les parois du vaiſſeau, qui le contient, ou la réſiſtance, qu'un corps ſolide, qui y eſt plongé, eſſaye, ou l'élaſticité & la denſité du fluide, lorsqu'il eſt compreſſible en chaque endroit: toutes ces queſtions, & d'autres ſemblables, qu'on peut imaginer tant ſur l'équilibre que le mouvement des fluides, ſe réduiſent à une ſeule recherche, qui eſt celle de l'état de preſſion, où le fluide ſe trouve dans chaque point. Je meſure cette preſſion par la hauteur d'une colonne d'une matiere peſante homogene, dont je poſe la denſité $= 1$, en ſorte que, pour trouver la preſſion, qu'une ſurface infiniment petite ſoutient, on n'a qu'à multiplier cette ſurface par la hauteur, qui lui convient, & le poids de ce volume, étant rempli de ladite matiere homogene, ſera égal à la preſſion cherchée.

V. C'eſt pour cette preſſion, ou plutôt la hauteur, qui lui ſert de meſure, que je donne une équation différentielle, & tout revient à en trouver l'intégrale. Mais, comme cette équation renferme pluſieurs variables, on n'en ſauroit entreprendre l'intégration, avant qu'on ait découvert le rapport entre ces variables, qui eſt néceſſaire pour la rendre intégrable. On tire de là les conditions de tout le mouvement, tant par rapport à la viteſſe de chaque particule qu'à la denſité, qui s'y trouve en chaque point, & à chaque inſtant; de ſorte qu'une ſeule équation différentielle renferme à la fois pluſieurs déterminations différentes. L'intégration en elle-même ne donne que la ſeule détermination de la preſſion, mais l'intégralité tient lieu de pluſieurs équations, qui fourniſſent les autres déterminations eſſentielles à la Théorie du mouvement des fluides. Or, pour avoir toutes les déterminations, par lesquelles en chaque cas le mouvement eſt entierement déterminé, il faut joindre à cette équation l'autre équation, que j'ai trouvée.

VI. Cette autre équation peut être regardée comme finie, puisqu'elle ne contient point des différentiels, quoiqu'elle en renferme des rapports. Elle eſt fondée ſur la continuité du fluide, & exclut tant le vuide, que les particules du fluide pourroient laiſſer entr'elles, que leur pénétration mutuelle. Cette derniere circonſtance eſt auſſi eſſentielle aux corps fluides que ſolides; mais à l'égard de l'autre, il peut bien arriver, que les parties du fluide ſe ſéparent actuellement, en laiſſant entr'elles un vuide, comme nous voyons dans les jets d'eau, qui ſont diſſipés enfin en gouttes. Les parties étant alors entièrement ſéparées entr'elles, il eſt évident qu'on n'y ſauroit plus appliquer mes formules; à moins qu'on ne veuille conſidérer chaque goutte ſéparément, entant qu'elle conſtitue un corps fluide à part. Toute la Théorie des fluides eſt donc uniquement fondée ſur deux équations, dont l'une contient la preſſion, & l'autre la continuité du fluide, dans toutes ſes parties.

VII. Sans entrer de nouveau dans le détail des raiſonnemens, qui m'ont conduit à ces deux équations, je me contenterai de mettre

ici

ici devant les yeux les équations mêmes. Et d'abord je considére le fluide comme remplissant un espace quelconque Z, je le rapporte selon la maniere ordinaire à trois axes fixes & perpendiculaires entr'eux au point O, par le moyen des trois coordonnées : Fig. 1.

$$OX = x; \quad XY = y, \quad \& \quad YZ = z$$

paralleles aux trois axes OA, OB & OC. Il est évident, que ces trois coordonnées sont indépendantes entr'elles; car pour avoir tous les points du fluide, il faut faire varier chacune séparément : & quand on aura donné à deux des valeurs déterminées, la variabilité de la troisième nous découvre encore une infinité de points differens. C'est donc par ces trois coordonnées que le lieu de chaque point du fluide est déterminé.

VIII. Mais quand il s'agit de différens attributs, qui conviennent à la particule du fluide, qui se trouve dans ce point, il ne suffit pas d'en savoir le lieu; il faut outre cela considérer, que l'état du fluide dans ce même point peut varier avec le tems, ce qui amene dans le calcul la quatrième variable, indépendante des trois autres, & par laquelle est marqué l'instant du tems, pour lequel on cherche l'état de la particule du fluide, qui se trouve alors au point Z. Pour cet effet il faut établir une époque fixe, depuis laquelle nous comptons le tems : soit donc t le tems écoulé depuis cette époque jusqu'à l'instant en question; de sorte que la question déterminée est à présent de chercher l'état du fluide au point Z, dont le lieu est déterminé par les trois coordonnées x, y, & z, & pour le tems depuis l'époque établie $= t$. Je marque ici comme ordinairement le tems par l'espace divisé par la vitesse, & la moitié du quarré de chaque vitesse donne la hauteur, d'où un corps grave tombant acquiert une vitesse égale.

IX. Ensuite, je pose pour le point Z déterminé par les trois variables x, y, & z, & pour le tems $= t$ la pression du fluide exprimée par la hauteur $= p$, de la maniere que j'ai expliquée cy-dessus. Or, de quelque maniere que cette hauteur p sera trouvée, on la pourra

tou-

toujours regarder comme une fonction des quatre variables x, y, z, & t, de ſorte que ſi l'on met le tems t conſtant, on en trouvera la preſſion pour tous les points Z du fluide, & au même inſtant ; mais ſi l'on fait conſtantes les trois coordonnées x, y, & z, on en connoitra les preſſions au même point Z pour tous les tems. Dans les cas donc où la preſſion au même point Z demeure toujours la même, elle ſera exprimée par une fonction du lieu ſeulement, ou des trois coordonnées x, y, z, ſans que le tems t y entre.

X. Il en eſt de même de la denſité du fluide, en cas qu'elle ſoit variable, comme nous devons le ſuppoſer pour rendre nos recherches générales. Soit donc q la denſité du fluide au point Z & pour le tems t, & q doit auſſi être regardée comme une fonction des quatre variables x, y, z, & t: la meſure de la denſité q eſt déjà déterminée par la denſité de la matiere grave & homogene mentionnée cy-deſſus, laquelle eſt exprimée par l'unité, d'où la denſité indéfinie q ſera exprimée par un nombre abſolu. Lorſque la denſité eſt partout & toujours la même, comme il arrive dans les fluides incompreſſibles, je poſe $q = g$. Dans les fluides élaſtiques, ou plutôt compreſſibles, la denſité q dépend de la preſſion p, ou uniquement, ou de plus d'une fonction des variables x, y, z, & t; où je remarque que la preſſion p meſure en même tems l'élaſticité des fluides au point Z ; vu que l'elaſticité eſt toujours balancée par la preſſion.

XI. Après la preſſion & la denſité, il faut conſidérer les forces accélératrices, par leſquelles tous les élémens du fluide ſont ſollicités, & dont la gravité n'eſt qu'un cas particulier, dont j'exprimerai la force accélératrice par l'unité, & partant les autres forces accélératrices par des nombres abſolus. Or, quelles que ſoient les forces accélératrices, qui agiſſent ſur l'élément du fluide en Z, on ſait qu'on les peut toujours réduire à trois, ſelon les directions ZP, ZQ, & ZR, fixes & paralleles à nos trois axes. Soient donc ces trois forces accélératrices :

ſelon $ZP = P$; ſelon $ZQ = Q$; ſelon $ZR = R$.

Si

Si elles dépendent uniquement du lieu Z, elles ſeront des fonctions des trois variables x, y, z; mais ſi l'on vouloit qu'elles variaſſent auſſi avec le tems, leurs expreſſions renfermeroient outre cela la quatrième variable t.

XII. Enfin, ſi le fluide eſt en mouvement, quel que ſoit le mouvement de la particule, qui ſe trouve à préſent au point Z, on le peut auſſi décompoſer ſelon les mêmes trois directions fixes ZP, ZQ, & ZR; ſoient donc les viteſſes de l'élément en Z

ſelon $ZP = u$; ſelon $ZQ = v$; ſelon $ZR = w$

de ces trois viteſſes dérivées on connoitra non ſeulement la vraye viteſſe du point Z, mais auſſi ſa direction. Car la vraye viteſſe ſera $\sqrt{(uu + vv + ww)}$, que je nommerai $= 8$, & les fractions $\frac{u}{8}$; $\frac{v}{8}$; $\frac{w}{8}$ exprimeront les coſinus des angles, ſous leſquelles la vraye direction eſt inclinée aux axes OA, OB, OC. Ces viteſſes doivent auſſi en général être enviſagées comme des fonctions quelconques des quatre variables x, y, z, & t, puisqu'il pourroit arriver qu'au même point Z le mouvement variât avec le tems. Or il eſt évident, que lorsqu'on aura trouvé pour quelque cas déterminé, ces fonctions u, v, & w, on ſera en état d'aſſigner le vray mouvement, que chaque particale du fluide aura à chaque inſtant.

XIII. Pour ne rien omettre, qui puiſſe ſembler néceſſaire à l'éclairciſſement de mes formules, je dois expliquer une maniere particuliere d'exprimer certaines valeurs différentielles, quoique je l'aye déjà employée pluſieurs fois. Lorsque s marque une fonction quelconque de x, y, z, & t, cette expreſſion $\left(\frac{ds}{dx}\right)$ marque le différentiel de s, (qui réſulte de la ſeule variabilité de x, en poſant les autres quantités y, z, & t conſtantes,) diviſé par dx; d'où l'on comprend ce que ſignifient ces expreſſions $\left(\frac{ds}{dy}\right)$, $\left(\frac{ds}{dz}\right)$, $\left(\frac{ds}{dt}\right)$. Donc, ſi

le différentiel complet de s eſt $ds = Ldx + Mdy + Ndz + Odt$, on voit qu'il y aura ſelon cette maniere d'écrire :

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = L;\ \left(\frac{ds}{dy}\right) = M;\ \left(\frac{ds}{dz}\right) = N;\ \left(\frac{ds}{dt}\right) = O.$$

Donc, en connoiſſant tous les différentiels particuliers, on en formera aiſément le différentiel complet, qui ſera :

$$ds = dx\left(\frac{ds}{dx}\right) + dy\left(\frac{ds}{dy}\right) + dz\left(\frac{ds}{dz}\right) + dt\left(\frac{ds}{dt}\right),$$

dont il eſt bon de bien remarquer la compoſition, puiſqu'elle nous ſervira à épargner quantité de coëfficiens, que nous ſerions obligés d'introduire dans le calcul.

XIV. Il eſt démontré, que dans un tel différentiel complet :

$$ds = Ldx + Mdy + Ndz + Odt,$$

les coëfficiens L, M, N, & O, ont toujours un tel rapport entr'eux qu'il y a :

$$\left(\frac{dL}{dy}\right) = \left(\frac{dM}{dx}\right);\ \left(\frac{dL}{dz}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right);\ \left(\frac{dL}{dt}\right) = \left(\frac{dO}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dM}{dz}\right) = \left(\frac{dN}{dy}\right);\ \left(\frac{dM}{dt}\right) = \left(\frac{dO}{dy}\right);\ \left(\frac{dN}{dt}\right) = \left(\frac{dO}{dz}\right),$$

& cette même maniere d'exprimer peut ſervir à démontrer cette belle propriété. Car, puiſque $L = \left(\frac{ds}{dx}\right)$, exprimons $\left(\frac{dL}{dy}\right)$ par $\left(\frac{dds}{dxdy}\right)$, ce qui marque qu'il faut différentier deux fois s de ſuite, en poſant la premiere fois la ſeule x, & la ſeconde fois la ſeule y variable, & omettre les différentiels dx & dy. Cela remarqué, on aura

$$\left(\frac{dL}{dy}\right) = \left(\frac{dds}{dxdy}\right) \quad \& \quad \left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dds}{dydx}\right);$$

or

or il eſt aiſé de montrer que $\left(\frac{dds}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{dds}{dy\,dx}\right)$, d'où la vérité de cette propriété devient évidente.

XV. Maintenant je poſe pour abréger :

$$X = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

$$Y = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

$$Z = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

& l'équation différentielle qui détermine la preſſion p eſt :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz - X\,dx - Y\,dy - Z\,dz,$$

dans laquelle le tems t eſt ſuppoſé conſtant. Or l'autre équation tirée de la continuité du fluide eſt :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0,$$

& ce ſont les deux équations qui contiennent toute la Théorie tant de l'équilibre que du mouvement des fluides, dans la plus grande univerſalité qu'on puiſſe imaginer.

XVI. Lorsqu'il eſt queſtion de l'équilibre, on n'a qu'à faire évanouïr les trois viteſſes u, v, & w, & puiſque alors les quantités X, Y, & Z, évanouïſſent auſſi, toute la Théorie de l'équilibre des fluides eſt contenuë dans ces deux équations :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \text{ le tems } t \text{ étant conſtant,}$$

& $$\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

de

de ſorte que la denſité q doit être une fonction indépendante du tems t, ou bien la denſité au même endroit Z, ſera toujours la même. Donc, puiſque $dp = Pq\,dz + Qq\,dy + Rq\,dz$, cette formule doit être un différentiel complet, & partant il faut que les forces P, Q, R, ayent tant entr'elles qu'à la denſité q un tel rapport qu'il ſoit :

$$\left(\frac{d.Pq}{dy}\right) = \left(\frac{d.Qq}{dx}\right)\;;\;\left(\frac{d.Pp}{dz}\right) = \left(\frac{d.Rq}{dx}\right)\;;\;\left(\frac{d.Qq}{dz}\right) = \left(\frac{d.Rq}{dy}\right)$$

& quand ces conditions n'ont pas lieu, il eſt impoſſible que le fluide puiſſe jamais parvenir à l'état d'équilibre. Je paſſe d'autres propriétés, que j'ai ſuffiſamment dévelopées dans mon Mémoire ſur l'équilibre des fluides.

XVII. Pour le mouvement en général, puiſque l'équation différentielle eſt :

$$dp = q(P-X)dx + q(Q-Y)dy + q(R-Z)dz,$$

afin qu'elle ſoit poſſible, nous aurons de ſemblables déterminations :

$$\left(\frac{d.q(P-X)}{dy}\right) = \left(\frac{d.q(Q-Y)}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{d.q(P-X)}{dx}\right) = \left(\frac{d.q(R-Z)}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{d.q(Q-Y)}{dz}\right) = \left(\frac{d.q(R-Z)}{dy}\right),$$

de ſorte que la ſeule premiere équation renferme quatre déterminations, mais auxquelles on peut ſatisfaire par une infinité de manieres différentes. Ces trois dernieres conditions ne déterminent donc abſolument les trois viteſſes, mais en chaque cas il faut avoir égard aux autres circonſtances, comme à l'état initial, à la figure du vaiſſeau, & aux forces externes, qui agiſſent quaſi par des piſtons ſur le fluide.

Ces

Ces circonſtances n'entrent pas en conſidération dans l'équation différentielle, mais il en faut tenir compte dans l'intégration.

XVIII. D'autres qui ont traité cette matiere, ſi l'on en excepte M.d'*Alembert*, n'ont donné au fluide qu'une étenduë par deux dimenſions tout au plus, ou du moins ils ont ſuppoſé que le mouvement de chaque particule ſe faſſe dans le même plan, & partant on ne peut regarder que comme particulieres les formules qu'ils ont trouvées; au lieu que celles que je viens de donner, ſont tout à fait générales, & on ne ſauroit imaginer aucun cas, quelque compliqué qu'il puiſſe être, qui n'y ſeroit pas compris. Il ſera donc bon de faire voir d'abord, que tout ce qu'on a découvert jusqu'ici ſur le mouvement des fluides, ſe déduit fort aiſément de mes formules générales: or presque tout ce qu'on a donné ſur cette matiere, ſe réduit au mouvement des fluides par des tuyaux infiniment étroits, ou qu'on peut au moins regarder comme tels, de ſorte que dans ces cas on ne conçoit qu'une ſeule dimenſion tant dans le fluide que dans ſon mouvement. Enſuite je ferai auſſi voir comment tout ce qu'on a écrit ſur le mouvement des fluides en conſidérant deux dimenſions, découle très naturellement de ces mêmes formules.

XIX. Que le fluide ſoit donc renfermé dans un tuyau FZV, dont l'amplitude ſoit partout quaſi infiniment petite, que je ſuppoſerai néanmoins variable, ce qui nous tiendra lieu de la ſeconde équation tirée de la continuité du fluide. Car nous n'aurons qu'à ſuppoſer partout le mouvement & l'amplitude, telle que la continuité exige. Pour cet effet ſoit dans un endroit fixe du tuyau F l'amplitude $= ff$, & après un tems quelconque $= t$, ſoit la denſité du fluide en F $= \phi$, & la viteſſe vraye dont le fluide s'y meut dans le tuyau $= \omega$; & quelque variables que puiſſent être la denſité ϕ, & la viteſſe ω, leur changement dépendra uniquement du tems t, de ſorte que ϕ & ω ſeront des fonctions du tems t ſeulement. Maintenant, ſi nous ſuppoſons à un endroit quelconque Z l'amplitude du tuyau $= rr$, qui ſera une fonction du ſeul lieu Z, ſans qu'elle dépende du tems t, & que nous

 poſi-

posions après le tems t, la densité du fluide en Z $= q$, & la vraye vitesse $= \aleph$; & par la continuité du fluide, il faut qu'il subsiste un certain rapport entre ces quantités, qui répondent aux sections F & Z.

XX. Pour trouver ce rapport, nous n'avons qu'à chercher la quantité du fluide, qui occupe maintenant le tuyau FZ, & la poser égale à celle, qui occupera après l'élément du tems dt, la partie du tuyau fz, prenant $Ff = \omega dt$ & $\aleph dt$. Pour cet effet soit la longueur du tuyau FZ $= s$, & il est clair que la quantité du fluide, qui remplit à présent le tuyau FZ, est $= \int qrrds$: or après l'élément du tems dt, puisque la densité q se change en $q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$, la quantité du fluide, qui rempliroit la même longueur FZ, seroit $= \int qrrds + dt\int rrds\left(\frac{dq}{dt}\right)$: ajoutons y la petite portion, qui occupera l'élément $Zz = \aleph dt$, qui sera $= qrr\aleph dt$, & en retranchons la portion, qui répond à l'espace $Ff = \omega dt$, qui seroit $ff\Phi\omega dt$, pour avoir la quantité du fluide, qui remplira après le tems dt l'espace du tuyau fz, qui sera:

$$= \int qrrds + dt\int rrds\left(\frac{dq}{dt}\right) + rrq\aleph dt - ff\Phi\omega dt.$$

Or celle-cy devant être égale à celle qui occupoit auparavant le tuyau FZ, ou à $\int qrrds$, nous aurons cette équation:

$$rrq\aleph = ff\Phi\omega - \int rrds\left(\frac{dq}{dt}\right),$$

qui tiendra lieu de l'équation tirée de la continuité du fluide.

XXI. Soient maintenant comme auparavant les forces accélératrices P, Q, R, qui agissent sur l'élément du fluide en Z, selon les directions ZP, ZQ, & ZR, & que u, v, w, expriment les vitesses dérivées du fluide en Z, selon ces mêmes directions pour le tems écoulé $= t$; ces directions étant prises paralleles aux trois axes fixes

fixes OA, OB, OC, auxquels je rapporte les trois coordonnées $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, qui déterminent le lieu du point Z. Or, puisque le tuyau FZ eſt regardé comme une ligne immobile, ſa nature ſera exprimée par une double équation entre les trois coordonnées x, y, & z; ou bien tant y que z ſera exprimé par une certaine fonction de x; & puisque $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, la longueur du tuyau $FZ = s$, ſera auſſi une fonction de x: de même que l'amplitude du tuyau en $Z = rr$. Ou réciproquement on pourra regarder les quantités x, y, z, & rr, comme des fonctions de la ſeule variable s, dont la nature ſera connuë, quand on ſuppoſe donnée la figure du tuyau.

XXII. Puisque la viteſſe vraye ϑ ſuit la direction du tuyau en Z nous en connoitrons les viteſſes dérivées, qui ſeront :

$$u = \frac{\vartheta dx}{ds}; \quad v = \frac{\vartheta dy}{ds}; \quad w = \frac{\vartheta dz}{ds};$$

d'où nous tirons comme en général $\vartheta\vartheta = uu + vv + ww$: enſuite nous aurons :

$$u\,dy = v\,dx; \quad u\,dz = w\,dx; \quad \& \quad v\,dz = w\,dy.$$

Or je remarque de plus, que puisque les deux variables y & z ne varient qu'avec x, de ſorte que prenant x conſtante, les deux autres y & z, ne ſubiſſent point de changemens; ſi nous rapportons tout à la variabilité de x, les expreſſions $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ &c. évanouïront; parce que $dy\left(\frac{du}{dy}\right)$, marque le différentiel de u, ſi l'on ſuppoſe x, & z, & t, conſtantes: or poſant x & t conſtantes les quantités u, v, w, ne ſauroient plus varier. Donc nous aurons :

$$X = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right); \; Y = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right); = Z \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

de ſorte que nous n'ayons dans ce cas que deux variables x & t.

XXIII.

XXIII. De là nous obtiendrons :

$$Xdx+Ydy+Zdz=dx\left(\frac{du}{dt}\right)+dy\left(\frac{dv}{dt}\right)+dz\left(\frac{dw}{dt}\right)+udx\left(\frac{du}{dx}\right)+udy\left(\frac{dv}{dx}\right)+udz\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

Or, puisque $udy=vdx$ & $udz=wdx$, nous aurons :

$$udx\left(\frac{du}{dx}\right)+udy\left(\frac{dv}{dx}\right)+udz\left(\frac{dw}{dx}\right)=udx\left(\frac{du}{dx}\right)+vdx\left(\frac{dv}{dx}\right)+wdx\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

$$=dx\left(\left(\frac{udu}{dx}\right)+\left(\frac{vdv}{dx}\right)+\left(\frac{wdw}{dx}\right)\right)=dx\left(\frac{\vartheta d\vartheta}{dx}\right)=\vartheta d\vartheta$$

en ne ſuppoſant que x variable, ou bien en ne ſuppoſant que le tems t conſtant, puiſque nous n'avons que deux variables x & t. Enſuite à cauſe de $u=\frac{\vartheta dx}{ds}$, puiſque le rapport $\frac{dx}{ds}$, ne dépend point du tems t, nous aurons $\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{dx}{ds}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)$, & partant :

$$dx\left(\frac{du}{dt}\right)+dy\left(\frac{dv}{dt}\right)+dz\left(\frac{dw}{dt}\right)=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)=ds\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right).$$

Par conſéquent nous aurons :

$$Xdx+Ydy+Zdz=ds\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)+\vartheta d\vartheta,$$

en ſuppoſant dans te terme $\vartheta d\vartheta$ le tems t conſtant.

XXIV. Donc, expoſant la preſſion du fluide en Z par la hauteur p, nous parvenons à cette équation différentielle :

$$\frac{dp}{q}=Pdx+Qdy+Rdz-ds\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)-\vartheta d\vartheta,$$

où le tems t eſt ſuppoſé conſtant, tout comme le terme $\vartheta d\vartheta$ le renferme déjà : & cette équation jointe à l'autre tirée du principe de la continuité :

$$rrq\vartheta=ff\Phi\omega-\int rrds\left(\frac{dq}{dt}\right),$$

renferme toutes les déterminations du mouvement du fluide par le tuyau

yau FZ. Je remarque ici en passant, que si au lieu de rapporter les quantités y & z à x, j'eusse rapporté ou x & z à y, ou x & y à z, j'eusse trouvé la même équation différentielle ; ce qui est évident, puisque aucune de ces trois coordonnées n'y entre préférablement aux autres. Elles n'y paroissent même plus que dans le membre $Pdx + Qdy + Rdz$, qui résulte des forces sollicitantes.

XXV. Voilà donc les formules pour le mouvement d'un fluide quelconque, tant incompressible, que compressible selon une loi quelconque, & sollicité par des forces accélératrices quelconques, par un tuyau d'une figure quelconque ; que personne n'a encore données dans ce degré de généralité autant que je sache. Mais aussi dois-je avoüer, que dans cette grande étenduë on ne sauroit découvrir l'intégrale de cette équation différentielle ; d'où dépend cependant toute la détermination du mouvement. Or, si nous supposons le fluide incompressible, & que sa densité soit partout & toujours la même $= g$, ce qui est le cas auquel on s'est principalement borné, à cause de $q = \phi = g$, nos deux équations pour le mouvement dans ce cas deviendront :

$$\frac{dp}{g} = Pdx + Qdy + Rdz - ds\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) - \upsilon d\upsilon,$$

& $$rr\upsilon = ff\omega, \quad \text{ou} \quad \upsilon = \frac{ff\omega}{rr}.$$

XXVI. Puisque y & z sont déterminées par x, quelles que soient les forces P, Q, R, la formule $Pdx + Qdy + Rdz$ sera toujours intégrable. Soit donc $Pdx + Qdy + Rdz = dV$, de sorte que V exprime ce que j'appelle l'effort des forces. Ensuite, puisque rr ne dépend point du tems t, pendant que la vitesse ω, à la section donnée F en dépend uniquement, nous aurons $\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = \frac{ff}{rr}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$, & l'expression $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$, ne dépendra pas non plus du lieu Z, ou de la variable x, ou de s.

Donc

Donc notre équation différentielle ſera :

$$\frac{dp}{g} = dV - \frac{ffds}{rr}\left(\frac{d\omega}{dt}\right) - 8\,d\,8\,,$$

& parce que le tems t eſt ſuppoſé ici conſtant, l'équation intégrale en ſera :

$$\frac{p}{g} = V - \left(\frac{d\omega}{dt}\right)\int\frac{ffds}{rr} - \tfrac{1}{2}\,8\,8 - \text{Conſt.}$$

ou bien en remettant pour 8 ſa valeur $\frac{ff\omega}{rr}$:

$$\frac{p}{g} = V - \left(\frac{d\omega}{dt}\right)\int\frac{ffds}{rr} - \frac{f^4\omega^2}{2\,r^4} + \text{Conſt.}$$

où la conſtante peut renfermer le tems t.

XXVII. Cette formule comprend tout ce qui a été écrit juſqu'ici ſur le mouvement des fluides par des tuyaux, ou canaux quelconques; que les Auteurs, ou ont ſuppoſés infiniment étroits, ou ont crû, qu'on pouvoit regarder le mouvement tel, comme s'ils étoient infiniment étroits. On n'a pas même douté d'appliquer cette formule au mouvement de l'eau par des vaiſſeaux d'une largeur quelconque, en quoi on s'eſt fondé ſur cette hypotheſe, que par toute l'étenduë de chaque ſection horizontale du vaiſſeau l'eau ait le même mouvement : & ayant comparé ce calcul avec les expériences, on a trouvé en effet, qu'on ne s'étoit pas écarté trop de la vérité. Cependant la condition de l'amplitude infiniment petite eſt ſi eſſentielle au cas, que je viens de déveloper, qu'on n'en ſauroit admettre à la rigueur l'application aux tuyaux, ou vaiſſeaux, dont la largeur eſt conſidérable. Les concluſions qu'on en en tire, ne peuvent être regardées que comme des approximations à la vérité.

XXVIII. On peut auſſi faire l'application de la formule (§.24.) au mouvement d'un fluide élaſtique par un tuyau infiniment étroit, quand on ſuppoſe que le mouvement eſt déjà devenu permanent, ou tel

tel qu'au même endroit du tuyau Z, tant la viteſſe v, que la denſité q, ſoit toujours la même. Dans ce cas les quantités q & v ſeront des fonctions de la ſeule variable s ou x, & partant $\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$, & $\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$; or les quantités ϕ & ω deviendront abſolument conſtantes. On aura donc $rrqv = ff\phi\omega$, & l'équation différentielle ſera $\frac{dp}{q} = dV - v\,dv$, où le tems eſt ſuppoſé conſtant. Donc, ſi la denſité q eſt proportionnelle au reſſort p, ou qu'il y ait $p = \frac{hq}{g}$, de ſorte que ſi la denſité eſt $= g$, l'élaſticité ſoit $= h$, on aura

$$\frac{h}{g}\,lq = V - \tfrac{1}{2}vv + \text{Conſt.} \qquad \text{ou bien :}$$

$$\frac{h}{g}\,lq = V - \frac{f^4\phi^2\omega^2}{2r^4qq} + \tfrac{1}{2}\omega^2 + \frac{h}{g}\,l\phi,$$

en prenant l'intégrale V en ſorte, qu'elle évanouïſſe au point F, où devient $q = \phi$, & $rr = ff$.

XXIX. Pour appliquer ce calcul à l'air, ſuppoſons encore plus généralement, que l'élaſticité ne dépend pas ſeulement de la denſité, mais auſſi de la chaleur, qui ſoit variable par la longueur du tuyau. Soit le degré de chaleur en Z $= \varrho$, que je ſuppoſe auſſi toujours le même, & en F $= \gamma$, où la denſité ſoit $\phi = g$, & poſons l'élaſticité en Z exprimée par la hauteur $p = \frac{hq\varrho}{g\gamma}$, où la chaleur ϱ ſoit donnée par une fonction quelconque de s, ou de x. Ayant donc

$$rrqv = ffg\omega, \;\&\; dp = \frac{h}{g\gamma}(q\,d\varrho + \varrho\,dq),$$

notre équation différentielle ſera :

$$\frac{h}{g\gamma}\left(d\varrho + \frac{\varrho\,dq}{q}\right) = dV - v\,dv\,;$$

 ou

ou bien à cause de $\frac{dq}{q} = -\frac{d\text{ȣ}}{\text{ȣ}} - \frac{2\,dr}{r}$,

$$\frac{h}{g\gamma}\left(d\varrho - \frac{\varrho\, d\text{ȣ}}{\text{ȣ}} - \frac{2\varrho\, dr}{r}\right) = dV - \text{ȣ}\, d\text{ȣ},$$

d'où il s'agit de chercher la valeur de ȣ.

XXX. Pour éviter les difficultés du calcul, supposons le tuyau horizontal, & partout de la même largeur, de sorte que $rr = ff$, $q\text{ȣ} = g\omega$, & la force accélératrice de la gravité donnera $dV = 0$, d'où nous aurons :

$$\frac{h}{g\gamma}\left(d\varrho - \frac{\varrho\, d\text{ȣ}}{\text{ȣ}}\right) = -\text{ȣ}\, d\text{ȣ}, \text{ ou } \frac{h}{g\gamma}\left(\frac{\text{ȣ}\, d\varrho - \varrho\, d\text{ȣ}}{\text{ȣȣ}}\right) = -d\text{ȣ},$$

dont l'intégrale est $\frac{h\varrho}{g\gamma\text{ȣ}} = \frac{h}{g\omega} + \omega - \text{ȣ}$, d'où l'on trouvera la vitesse ȣ, & de là la densité $q = \frac{g\omega}{\text{ȣ}}$, & enfin l'élasticité, ou la pression $p = \frac{h\varrho\omega}{\gamma\text{ȣ}} = h + g\,\omega\,(\omega - \text{ȣ})$. Si l'on prend l'unité pour marquer la densité du mercure, h sera la hauteur du barometre en F ; donc, si la hauteur du barometre à l'autre bout du tuyau Z, qui est $= p$, est aussi connuë, nous en tirerons :

$$\text{ȣ} = \frac{h\varrho\omega}{\gamma p} = \omega + \frac{h-p}{\gamma\omega}\,;\ \&\ q = \frac{g\gamma p}{hr}.$$

Donc $\omega\omega = \frac{\gamma p(h-p)}{g(h\varrho - \gamma p)}$, d'où l'on connoitra le mouvement de l'air par ce tuyau horizontal, qui se réduira à rien, à ce qu'on voit, lorsque $p = h$.

Fig. 3. XXXI. Or, si nous concevons un tuyau horizontal AC ouvert par ses deux bouts A & C, & que la hauteur du barometre en $A = AB = h$, soit plus grande que celle en $B = CD = p$, l'air coulera sans cesse de A vers C. Que ab représente le degré de chaleur

leur en A & cd celui en C, & tandis que $\frac{AB}{ab} > \frac{CD}{cd}$, le mouvement de l'air par le tuyau atteindra un degré permanent; mais lorsque $\frac{AB}{ab} = \frac{CD}{cd}$, & à plus forte raiſon lorsque $\frac{AB}{ab} < \frac{CD}{cd}$, le mouvement ira toujours en accélérant, & deviendra de plus en plus rapide. Cela arrivera donc lorsqu'il fait beaucoup plus chaud en C, que le barometre eſt plus bas qu'en A, où il eſt plus haut. Mais, ſi la hauteur du barometre eſt la même de part & d'autre, l'air ne ſe mouvra pas par le tuyau, quoique la chaleur ſoit différente; ce qui cependant n'eſt pas contraire à ce que j'ai démontré, que l'atmoſphere ne ſauroit être en équilibre, à moins qu'à égales hauteurs la chaleur ne ſoit la même: car dans le préſent cas l'équilibre eſt maintenu par la fermeté du tuyau.

XXXII. Sur le mouvement des fluides par des tuyaux infiniment étroits, on trouve encore des recherches particulieres, lorsque les tuyaux ne ſont pas en repos, mais qu'ils ſont tournés autour d'un axe. J'ai traité aſſes au long cette matiere en quelques Mémoires, que j'ai compoſés à l'occaſion d'une machine hydraulique auſſi ingénieuſe que nouvelle, inventée par M. le Conſeiller Privé de *Segner* à Halle. Quelque difficile & epineuſe que puiſſe paroitre cette recherche, elle peut être déduite aſſés aiſément de mes formules generales, & même de celles, que j'ai dejà dévelopées pour le mouvement des fluides par des tuyaux immobiles, en y introduiſant la conſidération du mouvement, qu'on veut ſuppoſer dans le tuyau. Dans les Mémoires allégués je n'ai examiné que les cas, où le tuyau eſt tourné autour d'un axe fixe; mais, puisque le tuyau peut recevoir une infinité d'autres mouvemens, je m'en vais faire l'application à un mouvement quelconque du tuyau.

XXXIII. Ici il faut d'abord bien diſtinguer le mouvement rélatif du fluide dans le tuyau, de ſon vrai mouvement; ce mouvement rélatif s'eſtime de la même maniere, comme ſi le tuyau étoit en repos;

 &

& le vray mouvement se trouve par la combinaison du mouvement rélatif avec le mouvement du tuyau. De la même maniere le vrai mouvement de chaque element du fluide sera composé de son mouvement rélatif & du mouvement du point du tuyau, où cette particule se trouve à chaque instant. Or les forces qui agissent sur le fluide se raportent à son vrai mouvement, & point du tout à son mouvement rélatif: cependant il est clair, que si le mouvement du tuyau étoit tel, que tous ses points fussent portés avec des vitesses égales & uniformes suivant la même direction, ou que tout l'espace qui contient le tuyau, se mût uniformement selon la même direction, le vrai mouvement du fluide demanderoit les mêmes forces, que le mouvement rélatif: ou bien le mouvement relatif subiroit les mêmes changemens que son mouvement véritable.

XXXIV. Ce n'est donc, qu'entant que les élémens du tuyau ne se meuvent pas uniformément, & selon la même direction, que le mouvement rélatif du fluide est troublé, entant que le fluide ne reçoit pas les mêmes accélérations que le tuyau. D'où il s'ensuit que le mouvement rélatif sera le même, que si le fluide étoit sollicité, outre les forces qui y agissent immédiatement, par des forces égales & contraires à celles dont le mouvement du tuyau est acceléré ou retardé. Pour rendre cela plus évident, on n'a qu'à considérer une portion de fluide dans un tuyau, & que le tuyau reçoive quelque accélération en avant, alors le fluide demeurera en arrière, & son état relatif dans le tuyau sera le même, que si le fluide étoit poussé en arrière par une accélération égale. Donc, pour déterminer le mouvement rélatif du fluide dans un tuyau mobile, nous n'avons qu'à transporter sur le fluide les forces accélératrices qui agissent sur le tuyau, mais selon des directions opposées.

XXXV. Que le tuyau par un mouvement quelconque soit donc
Fig. 4. parvenu après le tems $= t$, dans la situation FZV, qu'au bout F, soit comme auparavant son amplitude $= ff$, la densité du fluide $= \phi$,
&

& la viteſſe rélative dans le tuyau $= \omega$, & ces quantités ϕ & ω, ſeront des fonctions du tems, comme auſſi les trois coordonnées $OD = a$, $DE = b$, & $EF = c$, par lesquelles eſt déterminé le lieu du bout F au tems $= t$. Qu'à un autre point quelconque Z déterminé par les trois coordonnées $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, ſoit l'amplitude $= rr$, la longueur du tuyau $FZ = s$, & au même tems t, la denſité du fluide en $Z = q$, la viteſſe rélative dans le tuyau $= \varkappa$, & la preſſion $= p$. Donc, pour la continuité du fluide, qui ſe détermine également par le mouvement rélatif, que par l'abſolu, nous aurons cette équation : $rrq\varkappa = ff\phi\omega - \int rrds \left(\frac{dq}{dt}\right)$ pourvû qu'on étende l'intégrale $\int rrds \left(\frac{dq}{dt}\right)$ par la partie FZ, de ſorte qu'elle évanouïſſe en faiſant $x = a$, $y = b$, & $z = c$.

XXXVI. Soit l'élement du fluide en Z, ſollicité par les trois forces accélératrices $ZP = P$, $ZQ = Q$, & $ZR = R$, comme auparavant. Mais pour le mouvement du tuyau, quel qu'il ſoit, qu'on décompoſe le mouvement du point Z, ſelon les mêmes directions, dont les viteſſes ſoient :

ſelon $ZP = u$; ſelon $ZQ = v$; & ſelon $ZR = w$;

j'employe ici les mêmes lettres u, v, w, qui me marquoient auparavant les viteſſes du fluide, puisque dans ce ſens elles ne ſont plus dans le calcul, & qu'il n'y en a point à craindre de confuſion. Or, puisque le tuyau eſt ſuppoſé rigide, & ne ſauroit changer de figure pendant ſon mouvement, les trois viteſſes doivent tenir un certain rapport aux coordonnées, & cette conſidération nous fournit les déterminations ſuivantes :

$$u = l + \zeta y - \eta z;\quad v = m + \theta z - \zeta x;\quad w = n + \eta x - \theta y;$$

où les quantités l, m, n, ζ, η, θ, ſont, ou conſtantes, ou des fonctions quelconques du tems t.

XXXVII.

XXXVII. Pour obtenir maintenant les forces accélératrices du point Z du tuyau, il eſt évident que ces forces ſeront :

$$\text{ſelon ZP} = \frac{du}{dt}; \quad \text{ſelon ZQ} = \frac{dv}{dt}; \quad \text{ſelon ZR} = \frac{dw}{dt};$$

où du, dv, dw, marquent les changemens des viteſſes pendant le tems dt ; or pendant ce tems les trois coordonnées x, y, z, qui ſe rapporteur au point Z prennent les accroiſſemens $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$, & $dz = w\,dt$; d'où nous aurons :

$$du = dl + y\,d\zeta - z\,d\eta + \zeta v\,dt - \eta w\,dt$$

$$dv = dm + z\,d\theta - x\,d\zeta + \theta w\,dt - \zeta u\,dt$$

$$dw = dn + x\,d\eta - y\,d\theta + \eta u\,dt - \theta v\,dt,$$

& en ſubſtituant pour u, v, & w leurs valeurs, nous aurons :

$$\frac{du}{dt} = \frac{dl}{dt} + \frac{y\,d\zeta}{dt} - \frac{z\,d\eta}{dt} + \zeta m - \eta n - (\zeta\zeta + \eta\eta)x + \zeta\theta z + \eta\theta y$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} + \frac{z\,d\theta}{dt} - \frac{x\,d\zeta}{dt} + \theta n - \zeta l - (\theta\theta + \zeta\zeta)y + \theta\eta x + \zeta\eta z$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dn}{dt} + \frac{x\,d\eta}{dt} - \frac{y\,d\theta}{dt} + \eta l - \theta m - (\eta\eta + \theta\theta)z + \eta\zeta y + \theta\zeta x.$$

XXXVIII. Ayant trouvé ces accélérations, nous n'aurons qu'à les ſoutraire des forces accélératrices P, Q, R, qui agiſſent immédiatement ſur l'elément du fluide, qui ſe trouve en Z, & de là nous tirerons pour le mouvement rélatif du fluide dans le tuyau mobile l'équation différentielle ſuivante :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \frac{du}{dt}dx - \frac{dv}{dt}dy - \frac{dw}{dt}dz - ds\left(\frac{d\text{ȣ}}{dt}\right) - \text{ȣ}\,d\text{ȣ},$$

où le tems t eſt ſuppoſé conſtant ; & puisque la figure du tuyau eſt donnée, les trois variables x, y, z, ſeront déterminées par la ſeule s.

On

On n'a donc qu'à ſubſtituer pour $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, & $\frac{dw}{dt}$ les valeurs trouvées, & on aura les équations les plus générales pour le mouvement d'un fluide quelconque dans un tuyau agité d'un mouvement quelconque. Lorsqu'on veut que le tuyau tourne autour d'un axe fixe, ce n'eſt qu'un cas très particulier de l'hypotheſe générale, ſuivant laquelle j'ai établi le mouvement du tuyau tel, qu'il s'étende abſolument à tous les mouvemens poſſibles.

XXXIX. Pour faire voir l'uſage de ces formules dans quelque cas plus particulier, ſuppoſons d'abord que le fluide ſoit incompreſſible, & que ſa denſité ſoit partout & toujours la même. Poſons donc $\Phi = g$, & $q = g$, & l'équation, qui renferme la continuité du fluide, ſera $rr\upsilon = ff\omega$, donc $\upsilon = \frac{ff\omega}{rr}$, & $\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = \frac{ff}{rr}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$. Soit de plus $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz = d\mathrm{V}$, & l'intégrale de notre équation différentielle ſera :

$$\frac{p}{g} = \mathrm{C} + \mathrm{V} - \left(\frac{d\omega}{dt}\right)\int\frac{ffds}{rr} - \frac{f^4\omega^2}{2r^4} - \frac{xdl}{dt} - \frac{ydm}{dt} - \frac{zdn}{dt}$$
$$+ \frac{d\zeta}{dt}\int(ydx - xdy) + \frac{d\theta}{dt}\int(zdy - ydz) + \frac{d\eta}{dt}\int(xdz - zdx)$$
$$+ (\zeta m - \eta m)x + (\theta n - \zeta l)y + (\eta l - \theta m)z$$
$$- \tfrac{1}{2}(\zeta\zeta + \eta\eta)xx - \tfrac{1}{2}(\theta\theta + \zeta\zeta)yy - \tfrac{1}{2}(\eta\eta + \theta\theta)zz$$
$$+ \zeta\theta xz + \zeta\eta xy + \eta\zeta yz,$$

où puisque le tems eſt ſuppoſé conſtant, il faut prendre les intégrales $\int(ydx - xdy)$ &c. de la poſition du tuyau à chaque inſtant.

XL. Puiſque ce cas eſt encore trop général, ſuppoſons que le tuyau tourne autour de l'axe OC, en ſorte qu'après le tems $= t$, la viteſſe de rotation à la diſtance $= e$ ſoit $= v$, & la viteſſe de rotation du point Z, dont la diſtance à l'axe OC eſt $= \sqrt{(xx + yy)}$,

 ſera

fera $= \frac{v}{e}\sqrt{(xx+yy)}$, d'où nous tirerons ses vitesses derivées $u = \frac{vy}{e}$, $v = -\frac{vx}{e}$, & $w = 0$; de sorte que pour ce cas on aura :

$$l = 0;\ m = 0;\ n = 0;\ \zeta = \frac{v}{e};\ \eta = 0;\ \theta = 0;$$

& partant nous aurons pour le mouvement rélatif du fluide dans ce tuyau cette équation :

$$\frac{p}{g} = C + V - \left(\frac{dw}{dt}\right)\int\frac{ffds}{rr} - \frac{f^4 d\omega^2}{2r^4} + \frac{dv}{edt}\int(ydx - xdy) - \frac{vv}{2ee}(xx+yy),$$

où la constante peut encore renfermer le tems t d'une maniere quelconque.

XLI. Considérons la position initiale du tuyau, où le lieu du point Z ait été exprimé par les trois coordonnées X, Y, Z, & pendant le tems t le point Z ou Y aura décrit autour de l'axe OC un angle ψ, de sorte que $d\psi = \frac{vdt}{e}$, & $\psi = \int\frac{vdt}{e}$, d'où après le tems t, les coordonnées pour le point Z seront :

$$x = X\cos\psi - Y\sin\psi;\quad y = X\sin\psi + Y\cos\psi;\quad z = Z;$$

& partant $xx + yy = XX + YY$. De plus à cause de

$$dx = dX\cos\psi - dY\sin\psi;\ \&\ dy = dX\sin\psi + dY\cos\psi,$$

nous aurons : $\quad ydx - xdy = YdX - XdY.$

Donc, par l'équation pour la figure & situation du tuyau au commencement, nous aurons :

$$\frac{p}{g} = C + V - \left(\frac{dw}{dt}\right)\int\frac{ffds}{rr} - \frac{f^4 w^2}{2r^4} + \frac{dv}{edt}\int(YdX - XdY) - \frac{vv}{2ee}(XX+YY),$$

XLII.

XLII. On peut rapporter ici encore une autre queſtion de la derniere importance en plufieurs occaſions, qui roule ſur la force de réaction que le vaiſſeau ſoutient des preſſions du fluide, qui y eſt contenu. Comme cette réaction eſt le réſultat de toutes les preſſions du fluide ſur les parois du vaiſſeau, on la pourroit déduire de l'expreſſion générale, qui donne la preſſion du fluide en chaque endroit: or cette détermination deviendroit ſouvent trop épineuſe, & même impraticable. Mais j'ai expoſé ailleurs une autre méthode fort ſimple pour arriver à ce but, qui eſt fondée ſur cette belle propriété, que la réaction ſur le vaiſſeau eſt égale à la ſomme de toutes les forces, qui agiſſent ſur le fluide, moins celles qui ſont requiſes à maintenir ſon mouvement. De là ſi u, v, w, marquent les trois viteſſes du vray mouvement du fluide en Z, puiſque l'élément de la maſſe y eſt $= qrrds$, la réaction qui réſulte de cet élément ſe réduira à ces trois forces:

$$\text{ſelon } ZP = qrrds\left(P - \left(\frac{du}{dt}\right)\right); \text{ ſelon } ZQ = qrrds\left(Q - \left(\frac{dv}{dt}\right)\right)$$

$$\& \text{ ſelon } ZR = qrrds\left(R - \left(\frac{dw}{dt}\right)\right).$$

XLIII. On peut de même réſoudre la queſtion en général, lorsqu'on demande les forces, qu'un vaiſſeau quelconque ſoutient du fluide, qui s'y trouve agité d'une maniere quelconque. Car d'abord le vaiſſeau ſoutient les forces externes, qui agiſſent par le moyen des piſtons ſur le fluide; enſuite le vaiſſeau ſoutiendra auſſi de la part de chaque élément du fluide en Z, dont la maſſe peut être réprésentée par $q\,dx\,dy\,dz$, & que j'appellerai $= dM$, de certaines forces, qui ſe réduiſent à trois, ſuivant les directions ZP, ZQ & ZR, & ces forces élémentaires ſeront Fig. 1.

$$\text{ſelon } ZP = dM\left(P - \left(\frac{du}{dt}\right)\right); \text{ ſelon } ZQ = dM\left(Q - \left(\frac{dv}{dt}\right)\right)$$

$$\& \text{ ſelon } ZR = dM\left(R - \left(\frac{dw}{dt}\right)\right).$$

On

On n'a donc qu'à prendre les intégrales de ces formules, & les étendre par toute la masse fluide contenue dans le vaisseau, pour avoir conjointement avec les forces des pistons la force totale de la réaction.

XLIV. J'ai déjà remarqué que presque tous les cas du mouvement des fluides, qu'on a traités jusqu'ici, se réduisent à celui d'un tuyau infiniment étroit, que je viens de déveloper. Outre celui-là on n'en trouve guères, qu'on ait considéré. Or, pour y arriver il faut très considérablement limiter nos équations générales. Car d'abord il faut supposer le fluide incompressible, ou sa densité q constante, tant par rapport au tems qu'au lieu; posons donc $q = g$. Ensuite il faut supposer le mouvement du fluide permanent, ou tel qu'au même endroit les trois vitesses u, v, w, avec la pression p, demeurent toujours les mêmes, quoiqu'il passe continuellement d'autres élémens du fluide par le même point: de sorte que $\left(\frac{du}{dt}\right) = 0$, $\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$, & $\left(\frac{dw}{dt}\right) = 0$. Le tems n'entrera donc plus en considération, & toutes les quantités que nous aurons à déterminer, ne seront que des fonctions des trois variables x, y, & z; ce sont les trois vitesses u, v, w, avec la hauteur p, qui expriment la pression dans chaque point Z.

XLV. Nous aurons donc pour les quantités X, Y, & Z, les valeurs suivantes:

$$X = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Y = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$Z = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

& nos deux équations, qui renferment le mouvement du fluide, seront:

$$\frac{dp}{q} = \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz - \mathrm{X}dx - \mathrm{Y}dy - \mathrm{Z}dz,$$

& $$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

Donc, la premiere équation devant être intégrable, il faut qu'il soit

$$\left(\frac{d\mathrm{P}-d\mathrm{X}}{dy}\right) = \left(\frac{d\mathrm{Q}-d\mathrm{Y}}{dx}\right); \left(\frac{d\mathrm{P}-d\mathrm{X}}{dz}\right) = \left(\frac{d\mathrm{R}-d\mathrm{Z}}{dx}\right); \left(\frac{d\mathrm{Q}-d\mathrm{Y}}{dz}\right) = \left(\frac{d\mathrm{R}-d\mathrm{Z}}{dy}\right)$$

Or si les forces, dont le fluide est sollicité, sont réelles, la partie $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz$ est toujours intégrable d'elle-même, & l'intégrale que j'indique par V, marque l'effort des forces sollicitantes.

XLVI. Or, puisque le mouvement du fluide est supposé permanent, toutes les particules, qui passent successivement par le point Z, décriront la même route. Ou si nous concevons dans le fluide une section fixe B O C, toutes les particules qui passent par le même point F de cette section, se mouvront selon la même ligne F Z V. Introduisons donc cette ligne F Z V dans le calcul; & soient pour le point F les coordonnées $\mathrm{OE} = b$ & $\mathrm{EF} = c$, qui sont constantes pour la même courbe F Z V, mais variables de toutes les manieres possibles pour des courbes différentes. Pour un point quelconque Z de cette courbe soient les trois coordonnées $\mathrm{OX} = x$; $\mathrm{XY} = y$ & $\mathrm{YZ} = z$, & la nature de cette courbe sera exprimée par deux équations entre x, y, & z qui renfermeront outre cela les deux constantes b & c, comme ses parametres; d'où l'on pourra déterminer l'une & l'autre séparément par les trois coordonnées x, y & z. Soient donc les formules différentielles, qui en résultent: Fig. 2.

$$db = \mathrm{L}dx + \mathrm{M}dy + \mathrm{N}dz \quad \& \quad dc = ldx + mdy + ndz$$

où L, M, N, $l, m, n,$ seront des fonctions des seules coordonnées x, y, z.

XLVII. Puisque la particule en Z se meut suivant la direction de la courbe Zz, ses trois vitesses u, v, & w, tiendront entr'elles le même rapport, que les différentiels dx, dy & dz, entant qu'ils regardent la même courbe. Or, ayant dans ce cas $db = 0$ & $dc = 0$, nous aurons :

$$Lndx + Mndy = Nldx + Nmdy; \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{Ln - Nl}{Nm - Mn}$$

$$Lmdx + Nmdz = Mldx + Mndz; \text{ ou } \frac{dz}{dx} = -\frac{Lm + Ml}{Nm - Mn}$$

d'où nous tirons :

$$dx : dy : dz = Nm - Mn : Ln - Nl : Ml - Lm$$

Posons donc :

$$u = K(Nm - Mn); \; v = K(Ln - Nl); \; w = K(Ml - Lm)$$

où il est encore incertain, si le facteur commun K dépend uniquement des quantités constantes b & c, ou outre cela encore des coordonnées x, y & z, ce qu'il faut décider par l'équation tirée de la continuité du fluide.

XLVIII. Mais, pour avoir la valeur de $\left(\frac{du}{dx}\right)$, il faut regarder la seule x comme variable, & les deux autres y & z comme constantes, d'où cette considération s'étend sur les courbes voisines, & suppose par conséquent variables les quantités b & c; d'où nous aurons $db = Ldx$ & $dc = ldx$. Or nous verrons bientôt que le facteur K doit être une fonction de b & c. Soit donc :

$$dK = Bdb + Cdc$$

& puisque les autres quantités L, M, N, & l, m, n dépendent uniquement des trois coordonnées x, y & z, nous aurons :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = (BL + Cl)(Nm - Mn) + K\left(N\left(\frac{dm}{dx}\right) + m\left(\frac{dN}{dx}\right) - M\left(\frac{dn}{dx}\right) - n\left(\frac{dM}{dx}\right)\right)$$

De

De la même maniere on trouvera :

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = (\mathrm{BM} + \mathrm{C}n)(\mathrm{L}n - \mathrm{N}l) + \mathrm{K}\left(\mathrm{L}\left(\frac{dn}{dy}\right) + n\left(\frac{d\mathrm{L}}{dy}\right) - \mathrm{N}\left(\frac{dl}{dy}\right) - l\left(\frac{d\mathrm{N}}{dy}\right)\right)$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) = (\mathrm{BN} + \mathrm{C}n)(\mathrm{M}l - \mathrm{L}m) + \mathrm{K}\left(\mathrm{M}\left(\frac{dl}{dz}\right) + l\left(\frac{d\mathrm{M}}{dz}\right) - \mathrm{L}\left(\frac{dm}{dz}\right) - m\left(\frac{d\mathrm{L}}{dz}\right)\right)$$

& la ſomme de ces trois formules doit être égale à zero.

XLIX. Or la ſomme des trois premiers membres ſe détruit viſiblement ; & pour les derniers membres, ſi nous conſidérons, que les formules différentielles $\mathrm{L}dx + \mathrm{M}dy + \mathrm{N}dz$ & $l dx + m dy + n dz$ doivent être intégrables, on aura :

$$\left(\frac{dm}{dx}\right) = \left(\frac{dl}{dy}\right) ; \left(\frac{dn}{dx}\right) = \left(\frac{dl}{dz}\right) ; \left(\frac{dn}{dy}\right) = \left(\frac{dm}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right) = \left(\frac{d\mathrm{L}}{dy}\right) ; \left(\frac{d\mathrm{N}}{dx}\right) = \left(\frac{d\mathrm{L}}{dz}\right) ; \left(\frac{d\mathrm{N}}{dy}\right) = \left(\frac{d\mathrm{M}}{dz}\right),$$

& partant les trois derniers membres ſe détruiſent auſſi d'eux mêmes. D'où je concluds que K eſt uniquement fonction de b & c, comme j'ai ſuppoſé. Car ſi l'on croyoit, que K pût auſſi renfermer x, y, & z, je remarque dabord, que par le moyen des deux équations entre $b, c, x, y, z,$ on en pourroit éliminer deux, de ſorte que K ne feroit fonction que de b, c, & d'une des trois x, y, z. Or ſi s'étoit x, on auroit outre les termes qui ſe détruiſent encore $\left(\frac{d\mathrm{K}}{dx}\right)(\mathrm{N}m - \mathrm{M}n)$, & ainſi des deux autres, d'où il eſt évident, que K doit uniquement dépendre des deux quantités b & c.

L. Prenant donc pour K une fonction quelconque de b & c, nous avons déjà des valeurs générales pour les trois viteſſes :

$u = \mathrm{K}(\mathrm{N}m - \mathrm{M}n)$; $v = \mathrm{K}(\mathrm{L}n - \mathrm{N}l)$; $w = \mathrm{K}(\mathrm{M}l - \mathrm{L}m)$

qui

qui satisfont à la formule, que la continuité du fluide nous a fournie. Mais pour l'autre équation différentielle, je remarque que si l'on considéroit la seule x comme variable, & qu'on intégrât la formule, on trouveroit la vraye intégrale, pourvu qu'on fit entrer les deux autres variables y & z dans la constante, que l'intégration entraine. Dans ce cas on opéreroit de la même maniere, comme si l'on vouloit seulement chercher la pression pour les endroits, où y & z sont de même valeur, ou qu'on voulut chercher la pression pour une ligne droite parallele à l'axe O A. De la même maniere on pourroit trouver l'intégrale, en supposant x & y, ou x & z, constantes, ou en général pour une ligne quelconque, qu'on conçoit tirée par le fluide.

LI. En conséquence de cela nous pourrons aussi trouver l'intégrale, en ne considérant que la seule ligne F Z V, ou en regardant les quantités b & c comme constantes. Or, puisque alors les quantités y & z dépendent de x, si la variabilité de la seule x donne $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{dv}{dx}\right)$, $\left(\frac{dw}{dx}\right)$, les formules $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$ &c. deviendront nulles; d'où nous tirons:

$$Xdx + Ydy + Zdz = udx\left(\frac{du}{dx}\right) + udy\left(\frac{dv}{dx}\right) + udz\left(\frac{dw}{dx}\right).$$

Mais dans ce cas ayant $u : v : w = dx : dy : dz$, & partant $udy = vdx$ & $udz = wdx$, cette formule devient

$$Xdx + Ydy + Zdz = udx\left(\frac{du}{dx}\right) + vdx\left(\frac{dv}{dx}\right) + wdx\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

$$= dx\left(\frac{udu + vdv + wdw}{dx}\right) = dx\left(\frac{\vartheta d\vartheta}{dx}\right),$$

si nous prenons ϑ pour marquer la vitesse vraye du fluide en Z. Donc, si nous posons $Pdx + Qdy + Rdz = dV$, l'intégrale de notre équation différentielle sera $\frac{p}{g} = V - \frac{1}{2}\vartheta\vartheta + D$,

où D est une certaine fonction des quantités b & c.

LII.

LII. Cette même intégrale ſe trouve auſſi, ſans que nous négligions les formules $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$ &c. pourvu que nous remarquions que pour les viteſſes du fluide dans la ligne FZV il y a

$$udy = vdx; \quad udz = wdx \quad \& \quad vdz = wdy$$

Car alors la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ ſe change en celle-cy :

$$udx\left(\frac{du}{dx}\right)+udy\left(\frac{du}{dy}\right)+udz\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$vdx\left(\frac{dv}{dx}\right)+vdy\left(\frac{dv}{dy}\right)+vdz\left(\frac{dv}{dz}\right)=\text{ȣ}\,dx\left(\frac{d\text{ȣ}}{dx}\right)+\text{ȣ}\,dy\left(\frac{d\text{ȣ}}{dy}\right)+\text{ȣ}\,dz\left(\frac{d\text{ȣ}}{dz}\right)$$

$$wdx\left(\frac{dw}{dx}\right)+wdy\left(\frac{dw}{dy}\right)+wdz\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

dont l'intégrale eſt évidemment $\frac{1}{2}\,\text{ȣȣ}$: & nous aurons comme cy-deſſus : $\frac{p}{g} = V - \frac{1}{2}\,\text{ȣȣ} + D.$

Or, puiſque nous avons ici traité comme conſtantes les quantités b & c, la conſtante D renfermera ces quantités.

LIII. Donc, pour la même ligne courbe FZV, puiſque la valeur de D eſt conſtante, nous pourrons comparer entr'elles les preſſions du fluide dans tous les points de cette ligne, de ſorte que ſi nous ſavions la preſſion dans un ſeul point, nous en pourrions conclure la preſſion dans tous les autres. Car d'abord nous avons pour chaque point la valeur de V, & la figure de la ligne FZV nous donne à connoitre par les équationis $Ldx + Mdy + Ndz = 0$ & $ldx + mdy + ndz = 0$ les trois viteſſes u, v; w, d'où nous tirons :

$$\text{ȣȣ} = KK\left\{\begin{matrix} LL(mm+nn) + MM(ll+nn) + NN(ll+mm) \\ -2LMlm - 2LNln - 2MNmn \end{matrix}\right\}$$

où

où K est aussi une quantité constante par toute l'étendue de la courbe F Z V, & $\frac{1}{2}\,\text{ȣȣ}$ indique, comme j'ai déjà remarqué la hauteur duë à la vitesse ȣ, ou celle de laquelle un grave tombant acquiert la même vitesse ȣ.

LIV. L'équation trouvée $\frac{p}{g} = V - \frac{1}{2}\,\text{ȣȣ} + D$ sera donc la veritable intégrale de notre équation différentielle, pourvu qu'on assigne à D la juste valeur qui lui convient. Ou bien cette fonction de b & c doit être telle, qu'en différentiant l'équation trouvée, en supposant aussi b & c variables, on parvienne précisément à notre équation différentielle. Donc il faut qu'il soit $\text{ȣ}\,d\,\text{ȣ} - dD = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$; ce qui donne

$$\begin{aligned} & (u\,dy - v\,dx)\left(\frac{du}{dy}\right) + (u\,dz - w\,dx)\left(\frac{du}{dz}\right) \\ dD = {} & (v\,dy - u\,dy)\left(\frac{dv}{dx}\right) + (v\,dz - w\,dy)\left(\frac{dv}{dz}\right) \\ & + (w\,dx - u\,dz)\left(\frac{dw}{dx}\right) + (w\,dy - v\,dz)\left(\frac{dw}{dy}\right), \end{aligned}$$

ou bien :

$$\begin{aligned} dD = {} & (udy - vdx)\left(\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{dv}{dx}\right)\right) + (vdz - wdy)\left(\left(\frac{dv}{dz}\right) - \left(\frac{dw}{dy}\right)\right) \\ & + (wdx - udz)\left(\left(\frac{dw}{dx}\right) - \left(\frac{du}{dz}\right)\right). \end{aligned}$$

LV. Puisque D est fonction de b & c, posons $dD = E\,db + F\,dc$, & remettant pour db & dc leurs valeurs, nous aurons :

$$dD = (EL + Fl)dx + (EM + Fm)dy + (EN + Fn)dz$$

ce différentiel devant être égal à celui que nous venons de trouver, nous en tirerons les trois égalités suivantes :

$$EL + Fl = v\left(\frac{dv}{dx}\right) - v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dx}\right) - w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$EM + Fm = w\left(\frac{dw}{dy}\right) - w\left(\frac{dv}{dy}\right) + u\left(\frac{du}{dy}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

$$EN + Fn = u\left(\frac{du}{dz}\right) - u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dz}\right) - v\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

Ces trois égalités, en les combinant ensemble, & remarquant que

$$Lu + Mv + Nw = 0 \quad \& \quad lu + mv + nw = 0$$

nous les réduisons à ces deux :

$$\frac{E}{K} = l\left(\frac{dw}{dy}\right) - l\left(\frac{dv}{dz}\right) + m\left(\frac{du}{dz}\right) - m\left(\frac{dw}{dx}\right) + n\left(\frac{dv}{dx}\right) - n\left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$\frac{F}{K} = L\left(\frac{dw}{dy}\right) - L\left(\frac{dv}{dz}\right) + M\left(\frac{du}{dz}\right) - M\left(\frac{dw}{dx}\right) + N\left(\frac{dv}{dx}\right) - N\left(\frac{du}{dy}\right)$$

LVI. Puisque E, F, & K, sont des fonctions de b & c, il faut que ces deux formules soient telles, qu'en substituant pour $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$ &c. leurs valeurs, elles deviennent réductibles aux deux seules quantités b & c: c'est à dire, que par le moyen des deux équations entre $x, y, z,$ & $b, c,$ les trois quantités x, y & z en puissent entierement être éliminées. Donc, pour que cela arrive, il faut que la fonction K obtienne une certaine détermination. Ensuite il faut de plus, que ces deux quantités ou fonctions de b & c soient telles, que la formule $E\,db + F\,dc$ devienne intégrable : & de là on tirera la juste détermination de la quantité D, & par conséquent celle de la pression p. De là on comprend aussi que les deux équations entre x, y, z & b, c ne dependent pas entierement de notre volonté, mais qu'elles exigent certaines conditions, pour que le cas soit possible.

LVII. Un cas particulier, qui mérite notre attention, eſt lorsque chaque particule du fluide tourne autour de l'axe OC, de ſorte que toutes les lignes FZV ſont des cercles décrits autour de l'axe OC. Nous aurons donc, puisque tous ces cercles ſont en des plans paralleles au plan AOB, $YZ = z = c$, & $xx + yy = bb$; d'où nous tirons $db = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx + yy)}}$ & $dc = dz$ & partant:

$$L = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}};\ M = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}},\ N = 0;\ l = 0;\ m = 0;\ n = 1.$$

Donc les viteſſes ſeront:

$$u = -\frac{Ky}{\sqrt{(xx+yy)}};\quad v = \frac{Kx}{\sqrt{(xx+yy)}}\ \&\ w = 0$$

& la viteſſe vraye $\mathfrak{v} = \sqrt{(uu + vv + ww)} = K$ D'où l'on voit que, par toute la periphérie du même cercle, la viteſſe eſt la même, ou que chaque élément du fluide ſe meut d'un mouvement uniforme autour de l'axe OC, dont la viteſſe $\mathfrak{v} = K$ eſt une fonction, tant de la hauteur du cercle $EF = c$ que de ſon rayon $OE = b$.

LVIII. La preſſion du fluide, qui tourne de cette façon autour de l'axe OC, ſera donc en chaque point Z; $\frac{p}{g} = V - \frac{1}{2}KK + D$ où la quantité D doit être une certaine fonction de b & c, en ſorte que

$$dD = (udy - vdx)\left(\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{dv}{dx}\right)\right) + vdz\left(\frac{dv}{dz}\right) + udz\left(\frac{du}{dz}\right).$$

Or $udy - vdx = -\frac{Kydy - Kxdx}{\sqrt{(xx+yy)}} = -Kdb$, & $dz = dc$, de plus poſant $dK = Bdb + Cdc = \frac{Bxdx + Bydy}{\sqrt{(xx+yy)}} + Cdz$, nous aurons:

$\left(\frac{du}{dy}\right)$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{Kxx}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Byy}{xx+yy} \;\&\; \left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{Kyy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Bxx}{xx+yy}.$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right) = \frac{Cx}{\sqrt{(xx+yy)}} \;\&\; \left(\frac{du}{dz}\right) = -\frac{Cy}{\sqrt{(xx+yy)}}.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées donnent, à cauſe de $b = \sqrt{(xx+yy)}$

$$dD = \frac{KKdb}{b} + BKdb + CKdc = \frac{KKdb}{b} + KdK$$

Cette formule devant être intégrable, il faut que K ſoit une fonction quelconque de b ſeulement, ſans renfermer la hauteur $EF = c$.

LIX. Donc la viteſſe par chaque cercle décrit autour de l'axe OC dépend uniquement du rayon de ce cercle ; prenant donc pour K une fonction quelconque du rayon $OE = b$, nous aurons $D = \int \frac{K^2\,db}{b} + \frac{1}{2}KK$; & partant pour la preſſion nous aurons cette équation :

$$\frac{p}{g} = V + \int \frac{K^2\,db}{b}.$$

Les limites, ou la ſurface ſuprême de cette maſſe fluide ſera là, où la preſſion p évanouït, c'eſt à dire, où il y aura : $V + \int \frac{K^2\,db}{b} = 0$.

Sous cette ſurface le fluide ſe trouvera dans tout l'eſpace, où la preſſion p ſe trouve poſitive. On voit bien que cette ſurface ſera engendrée par la rotation d'une certaine courbe autour de l'axe OC, & la nature de cette courbe ſera exprimée par l'équation $V + \int \frac{KKdb}{b} = 0$.

Or cette même équation, en changeant les conſtantes, exprime toutes les autres ſurfaces, où la preſſion eſt la même, qu'on appelle les ſurfaces de niveau.

LX. Soit AZC la génératrice d'une telle surface de niveau, &
Fig. 5. qu'on pose $OP = x$, $PZ = y$ & $OZ = z$, de sorte que y marque le rayon du cercle décrit par le point Z autour de l'axe OC ; & soit υ la vitesse de ce point, & une fonction quelconque du rayon $PZ = y$. Que le point Z soit attiré au centre O par une force accélératrice Z, qui soit une fonction quelconque de la distance $OZ = z$, & on aura pour la nature de la courbe AZC cette équation

$$-\int Z\,dz + \int \frac{\upsilon\upsilon\,dy}{y} = 0.$$

Soit, par exemple, $Z = \alpha z^m$ & $\upsilon = \beta y^n$, & notre équation sera $\frac{\beta\beta y^{2n}}{2n} = \frac{\alpha z^{m+1} - \alpha a^{m+1}}{m+1}$, en posant le demi-axe $OC = a$, & de là le demi-diametre de l'équateur OA, qui soit $OA = e$, sera déterminé par cette équation :

$$\frac{(m+1)\beta\beta}{2\alpha n} e^{2n} = e^{m+1} - a^{m+1}$$

ou bien, sachant le demi-diametre de l'équateur $OA = e$, le demi-axe sera : $a = \sqrt[m+1]{\left(e^{m+1} - \frac{(m+1)\beta\beta}{2\alpha n} e^{2n}\right)}$ & si la différence est fort petite, on aura $a = e - \frac{\beta\beta}{2\alpha n} e^{2n-m}$.

LXI. Considérons aussi un fluide qui tourne dans un vaisseau
Fig. 6. cylindrique AEFB, autour de son axe OC, qui soit vertical, & que le fluide n'essuye d'autres forces que celle de la gravité. La plus haute surface ACB sera donc concave; & pour en trouver la nature, posons $OP = z$ & $PZ = y$, & la vitesse rotatoire du point Z, qui soit $= \upsilon$, soit une fonction quelconque du rayon $PZ = y$. L'effort de la gravité $= 1$, agissant dans la direction verticale sera $= \int -dz = -z$, d'où l'équation pour la courbe CZA sera :

$\int$

$\int \frac{uu\,dy}{y} = z - a$. Donc, si la vitesse est proportionelle à la distance de l'axe y, ou qu'il soit $u = \frac{y}{\sqrt{c}}$, l'équation sera $yy = 2c(z-a)$: & partant la courbe ACB sera une parabole dont le sommet est en C, & le parametre $= 2c$. Il est évident que les solutions de ces cas sont les mêmes, que celles qu'on a trouvées par les methodes ordinaires.

LXXII. Passons à des cas un peu plus compliqués, & supposons que chaque courbe FZV se trouve toute dans un plan parallele au plan AOB, & que le mouvement par tous les plans paralleles au plan AOB soit le même. On aura donc pour la courbe FZV, premièrement $z = c$, & ensuite une équation entre les deux coordonnées x, y, & le parametre $OE = b$, qui sera indépendante de la hauteur $EF = c$; de cette équation on pourra donc définir b par x & y, d'où nos deux équations différentielles pour toutes les courbes FZV seront : Fig. 2.

$$db = L\,dx + M\,dy \quad \& \quad dc = dz$$

de sorte que $N = 0$, $l = 0$, $m = 0$, & $n = 1$. Donc les trois vitesses du point Z seront :

$$u = -KM; \quad v = KL \quad \& \quad w = 0.$$

D'où, si nous posons $dK = B\,db + C\,dc = BL\,dx + BM\,dy + C\,dz$, nous aurons :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = -BLM - K\left(\frac{dM}{dx}\right); \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = -BM^2 - K\left(\frac{dM}{dy}\right) \quad \left(\frac{du}{dz}\right) = -CM$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = +BL^2 + K\left(\frac{dL}{dx}\right); \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = BLM + K\left(\frac{dL}{dy}\right); \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) = CL.$$

LXIII. Ces valeurs fourniſſent les formules ſuivantes:

$$X = K^2\left(M\left(\frac{dM}{dx}\right) - L\left(\frac{dM}{dy}\right)\right)$$

$$Y = K^2\left(L\left(\frac{dL}{dy}\right) - M\left(\frac{dL}{dx}\right)\right)$$

& $$Z = 0:$$

D'où à cauſe de $\left(\frac{dL}{dy}\right) = \left(\frac{dM}{dx}\right)$ nous aurons:

$$Xdx + Ydy + Zdz = K^2\left(Mdx\left(\frac{dM}{dx}\right) - Ldx\left(\frac{dM}{dy}\right) + Ldy\left(\frac{dL}{dy}\right) - Mdy\left(\frac{dL}{dx}\right)\right)$$

Ou bien poſant la vraye viteſſe $\sqrt{(uu + vv + ww)} = 8$, la preſſion ſera exprimée par cette formule $\frac{p}{g} = V - \frac{1}{2}88 + D$, où D eſt une telle fonction de b & c, que

$$dD = Kdb\left(B(L^2 + M^2) + K\left(\frac{dL}{dx}\right) + K\left(\frac{dM}{dy}\right)\right) + CK(LL + MM)dc$$

Or $Bdb + Cdc = dK$; donc

$$dD = KdK(LL + MM) + KKdb\left(\left(\frac{dL}{dx}\right) + \left(\frac{dM}{dy}\right)\right)$$

& partant il faut, que les quantités x & y ſe puiſſent entierement éliminer de cette formule, par la relation donnée entre x, y & b.

LXIV. Dans le cas du cercle il eſt arrivé, que les quantités $LL + MM$ & $\left(\frac{dL}{dx}\right) + \left(\frac{dM}{dy}\right)$ ſont devenues réductibles à la ſeule quantité b: mais, ſi l'on prend d'autres lignes courbes, on s'appercevra bientôt, que cette réduction ne ſauroit avoir lieu que très rarement. Et il ſemble que ce ſoit un des plus difficiles problèmes, de trouver telles équations entre x, y & b, que la valeur trouvée pour dD puiſſe entierement être delivrée des quantités x & y par le moyen

moyen de l'équation ſuppoſée. Or ſi cela arrive ou non? on s'aſſeurera en ſorte: Ayant trouvé l'expreſſion différentielle de dD, on ſubſtituera pour y ſa valeur par b & x; enſuite on verra s'il eſt poſſible de poſer pour K une telle fonction de b, que tous les termes, qui contiennent encore x, ſe détruiſent tout à fait: quand cela réuſſit, on aura dD exprimé par une fonction de b multipliée par db, d'où l'on obtiendra enfin aiſément l'intégrale.

LXV. Quelque difficile qu'il ſoit de réſoudre cette équation, ou de lui ſatisfaire par des formules particulieres, on en peut trouver une infinité par une ſuppoſition heureuſe, qui rend d'abord l'équation différentielle intégrable, au lieu que j'ai commencé ici par ſatisfaire à l'équation tirée de la continuité. J'ai déjà remarqué que notre équation différentielle devient intégrable, en prenant pour les trois viteſſes u, v, w, telles fonctions de x, y, & z, que la formule $udx + vdy + wdz$ admette l'intégration, ce qui ſe peut faire par une infinité de manieres différentes: car on n'a qu'à prendre à volonté une fonction quelconque de x, y, z, la différentier, & choiſir les coëfficiens de dx, dy, & dz, pour les valeurs de u, v, & w. Mais il faut bien prendre garde, qu'on ne donne cette ſolution pour générale, vû qu'il y a une infinité de mouvemens poſſibles, où la formule $udx + vdy + wdz$, n'eſt pas intégrable. Cependant cette ſuppoſition eſt très propre à nous fournir une infinité de ſolutions particulieres, auxquelles on ne ſauroit parvenir par la methode que je viens d'expliquer.

LXVI. Soit donc comme jusqu'ici le fluide incompreſſible, & ſa denſité partout & toujours la même $q = g$: & que de plus le mouvement ſe trouve dans un état permanent, de ſorte que le tems n'entre point en conſidération. Pour ce cas j'ai donné cy-deſſus (45) les deux équations, qui renferment les conditions du mouvement. Suppoſons de plus que la formule $Pdx + Qdy + Rdz$, tirée des forces accélératrices, ſoit intégrable, l'intégrale étant $= V$ qui exprime l'effort de ces forces. Cela poſé;

 Soit

Soit la formule $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ intégrable,

& à cause de $\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)$; $\left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right)$; $\left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dy}\right)$

nous aurons :

$$X = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dx}\right) + w\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

$$Y = u\left(\frac{du}{dy}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

$$Z = u\left(\frac{du}{dz}\right) + v\left(\frac{dv}{dz}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

donc $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = u\,du + v\,dv + w\,dw.$

LXVII. Posant donc la vitesse véritable

en $Z = \mathfrak{v} = \sqrt{(uu + vv + ww)}$

l'intégrale de notre équation différentielle sera :

$$\frac{p}{g} = V - \tfrac{1}{2}\mathfrak{v}\mathfrak{v} + C,$$

où C est une telle constante, qui demeure partout & toujours la même. Et de là on reconnoit d'abord, que cette solution n'est que particuliere, vû que nous avons déjà eu des cas, où la pression p n'étoit pas définie par cette forme. Car, si nous comparons cette expression avec l'intégrale générale trouvée ci-dessus $\frac{p}{g} = V - \tfrac{1}{2}\mathfrak{v}\mathfrak{v} + D$, nous voyons que l'hypothese présente n'est que ce cas particulier, où D devient égal à une quantité constante, au lieu qu'en géneral la quantité D étoit variable par rapport aux courbes différentes, que les particules du fluide parcourent, quoique pour la même courbe D demeure invariable.

LXVIII. Cela eſt auſſi évident par l'expreſſion différentielle, qui a été trouvée cy-deſſus (54) pour la valeur de dD, qui évanouït ouvertement lorsque $\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)$; $\left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dy}\right)$; $\left(\frac{dw}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dz}\right)$ & ce ſont les conditions de l'intégrabilité de la formule : $udx + vdx + wdz$, de ſorte que dans ce cas la quantité D devient en effet conſtante. Donc, puisque en géneral elle peut avoir une valeur variable, on ſe tromperoit fort, ſi l'on s'imaginoit que l'intégrabilité de la formule $udx + vdy + wdz$ fût une condition abſolument néceſſaire pour tous les mouvemens des fluides. Mais cette hypotheſe ne ſatisfait qu'à l'équation différentielle, & il reſte encore à remplir la condition de la continuité contenuë dans cette formule : $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$. Et partant il s'agit de trouver telles expreſſions pour u, v, & w, qu'il ſoit :

I. $udx + vdy + wdz$ intégrable : & II. $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$,

& alors on aura pour l'état de preſſion du fluide cette équation :

$$\frac{p}{g} = V - \tfrac{1}{2} ss + C.$$

LXIX. Pourſuivons d'abord le cas, où chaque particule du fluide acheve ſon mouvement dans le même plan, auquel l'axe OC ſoit perpendiculaire, ou ce qui revient au même, que toute la maſſe du fluide ſoit réduite au plan AOB, auquel ſe faſſe auſſi le mouvement. Or c'eſt à ce cas principalement, que ſe ſont attachés ceux qui ont examiné plus ſoigneuſement le mouvement des fluides. Donc, puisque dans ce cas la viteſſe w eſt nulle, notre hypotheſe exige de telles valeurs pour les deux autres viteſſes u & v, qu'il ſoit :

I. $udx + vdy$ intégrable, & II. $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$,

& alors on aura pour la preſſion p, l'équation ſuivante :

$$\frac{p}{g} = V - \tfrac{1}{2} ss + C,$$

pre-

prenant $\mathfrak{v}$ pour la vraye viteſſe de chaque particule, ou $\frac{1}{2}\mathfrak{v}\mathfrak{v}$, pour la hauteur duë à cette viteſſe, de ſorte que $\mathfrak{v}\mathfrak{v} = uu + vv$. Mais il ne faut pas penſer, que ces deux conditions renferment tous les mouvemens poſſibles dans le même plan ; car il y a en effet des mouvemens, où la formule $udx + vdy$ n'eſt pas intégrable.

LXX. Or on ſatisfait à la formule $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$, en rendant ce différentiel $udy - vdx$ intégrable. Il faut donc que ces deux formules $udx + vdy$ & $udy - vdx$ ſoient intégrables, ce qu'on obtient par la méthode fort ingénieuſe de M. d'*Alembert*. Car, puisqu'il faut que la premiere, plus la ſeconde multipliée par $\sqrt{-1}$, ſoit auſſi intégrable, on aura :

$u(dx + dy\sqrt{-1}) + \frac{v}{\sqrt{-1}}(dx + dy\sqrt{-1})$, à rendre intégrable.

Et prenant $\sqrt{-1}$ auſſi négatif, il faut que ces deux formules :

$$\left(u + \frac{v}{\sqrt{-1}}\right)(dx + dy\sqrt{-1}) \;\&\; \left(u - \frac{v}{\sqrt{-1}}\right)(dx - dy\sqrt{-1}),$$

ſoient intégrables ; auxquelles conditions on ſatisfait en prenant pour $u + \frac{v}{\sqrt{-1}}$ une fonction quelconque de $x + y\sqrt{-1}$, & pour $u - \frac{v}{\sqrt{-1}}$ une fonction quelconque de $x - y\sqrt{-1}$. Or il faut prendre de telles fonctions, que les deux valeurs de u & v deviennent réelles, & que les imaginaires ſoient détruites.

LXXI. Prenons les ϕ & ψ pour marques des fonctions, & poſons :

$$u + \frac{v}{\sqrt{-1}} = \tfrac{1}{2}\phi:(x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\psi:(x + y\sqrt{-1})$$

$$u - \frac{v}{\sqrt{-1}} = \tfrac{1}{2}\phi:(x - y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\psi:(x - y\sqrt{-1}),$$

&

& nous aurons :

$$u = \tfrac{1}{2}\phi:(x+y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\phi:(x-y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\psi:(x+y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\psi:(x-y\sqrt{-1})$$

$$v = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}\phi:(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\phi:(x-y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\psi:(x+y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\psi:(x-y\sqrt{-1})$$

Or si $\phi:p$ & $\phi:q$ marquent des fonctions semblables des quantités p & q, de même que $\psi:p$ & $\psi:q$, les imaginaires se détruiront dans nos formules, & u & v seront exprimées par des fonctions réelles de x & y.

LXXII. Or, pour trouver les valeurs réelles que ces expressions renferment, posons la droite $OY = s$, & l'angle $AOY = \omega$, pour avoir $x = s\cos\omega$, & $y = s\sin\omega$; & puisque Fig. 7.

$x \pm y\sqrt{-1} = s(\cos\omega \pm \sqrt{-1}\sin\omega)$, & une puissance quelconque $(x \pm y\sqrt{-1})^n = s^n(\cos n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin n\omega)$, nous aurons en posant:

$$\phi:p = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4 + \&c.$$
$$\psi:p = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}p + \mathfrak{C}p^2 + \mathfrak{D}p^3 + \mathfrak{E}p^4 + \&c.$$

pour les vitesses u & v les formules suivantes :

$$u = A + Bs\cos\omega + Css\cos 2\omega + Ds^3\cos 3\omega + Es^4\cos 4\omega + \&c.$$
$$+ \mathfrak{B}s\sin\omega + \mathfrak{C}ss\sin 2\omega + \mathfrak{D}s^3\sin 3\omega + \mathfrak{E}s^4\sin 4\omega + \&c.$$
$$v = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}s\cos\omega + \mathfrak{C}ss\cos 2\omega + \mathfrak{D}s^3\cos 3\omega + \mathfrak{E}s^4\cos 4\omega + \&c.$$
$$- Bs\sin\omega - Css\sin 2\omega - Ds^3\sin 3\omega - Es^4\sin 3\omega + \&c.$$

où l'on peut prendre pour les coëfficiens A, B, C, &c. & $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, &c. des quantités constantes quelconques: & si l'on veut remettre les valeurs $s = \sqrt{(xx+yy)}$; $\sin\omega = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$; & $\cos\omega = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$ on obtiendra les vitesses u & v, exprimées par x & y.

LXXIII. De là on pourra aussi trouver une équation pour toutes les courbes, que chaque particule du fluide décrira sur le plan AOB.

AOB. Soit EYV la courbe, que décrit la particule, qui se trouve en Y; & puisque les vitesses fournissent $dx = udt$ & $dy = vdt$, la nature de cette courbe sera exprimée par cette équation $udy - vdx = 0$. Maintenant, si nous substituons pour u & v les valeurs trouvées à cause de $dy = ds\sin\omega + sd\omega\cos\omega$, & $dx = ds\cos\omega - sd\omega\sin\omega$, nous trouverons de l'équation $udy - vdx = 0$ l'intégrale suivante:

$$\mathrm{O} = \pm\, \mathrm{A}s\sin\omega + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}s^2\sin 2\omega + \tfrac{1}{3}\mathrm{C}s^3\sin 3\omega + \tfrac{1}{4}\mathrm{D}s^4\sin 4\omega + \&c.$$
$$- \mathfrak{A}s\cos\omega - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}s^2\cos 2\omega - \tfrac{1}{3}\mathfrak{C}s^3\cos 3\omega - \tfrac{1}{4}\mathfrak{D}s^4\cos 4\omega - \&c.$$

où O marque une quantité, qui est bien constante pour toute la courbe EYV, mais pour des courbes diverses elle doit être variable. Elle sera donc comme le parametre de ces courbes, dont la variabilité fournit toutes les courbes, que tous les élemens du fluide décrivent.

LXXIV. Voilà donc une équation générale pour toutes les courbes, qui peuvent être décrites par les particules du fluide, entant que l'hypothese de l'intégrabilité de la formule $udx + vdy$ est admise. Cette équation est entièrement générale, si l'on y ajoute aussi des termes, où l'exposant de s est, ou négatif, ou rompu, comme $s^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}\omega$, $s^{\frac{1}{3}}\sin\frac{1}{3}\omega$, &c. Car, quand même les fonctions de $x \pm y\sqrt{-1}$ seroient, ou rompuës, ou irrationnelles, ou même transcendantes, on les peut toujours convertir en des series infinies, dont les termes renferment des puissances $x \pm y\sqrt{-1}$, & par là on parviendra toujours à une expression semblable à la trouvée. Je remarque de plus, qu'une telle fonction $\log.(x+y\sqrt{-1}) + \log.(x-y\sqrt{-1})$ donneroit $2ls$, & $\frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ donneroit 2ω, d'où nous pourrons encore ajouter à nos formules à volonté tels termes αls & $\mathfrak{C}\omega$, qui rendroient les courbes transcendantes.

LXXV. Mais ce qui est le plus important de remarquer sur cette équation, c'est qu'elle renferme toutes les courbes possibles, ou bien le mouvement du fluide peut toujours être tel, qu'une des courbes EYV

soit

ſoit une ligne donnée. Et c'eſt par cette propriété, que notre calcul peut être appliqué à un vaiſſeau d'une figure donnée; car, ſi le plan, où ſe trouve le fluide eſt terminé par la ligne BH, il faut bien que cette ligne BH, ſoit une de l'infinité des courbes EYV. Comme toutes ces courbes différent entr'elles par la variabilité de la quantité O, on peut concevoir que le cas $O=0$, donne la courbe propoſée BH. Or dans ce cas notre équation peut être réduite à cette forme :

$$0=\phi:(x+y\sqrt{-1})+\phi:(x-y\sqrt{-1})+\frac{1}{\sqrt{-1}}\psi.(x+y\sqrt{-1})-\frac{1}{\sqrt{-1}}\psi:(x-y\sqrt{-1}).$$

Il s'agit donc de prouver, que quelle que ſoit la courbe donnée BH, ſon équation entre x & y eſt toujours réductible à cette forme, ou qu'on peut toujours aſſigner pour ϕ & ψ telles formes de fonctions, que cette équation exprime une ligne donnée.

LXXVI. Pour mettre cela hors de doute, poſons $x+y\sqrt{-1}=2p$ & $x-y\sqrt{-1}=2q$, de ſorte que $x=p+q$ & $y=\frac{p-q}{\sqrt{-1}}$; & ſubſtituons ces valeurs pour x & y dans l'équation de la courbe donnée BH. De là nous obtiendrons une équation entre p & q, dans laquelle entreront les deux quantités p & q presque également, la différence ne viendra que du ſigne $\sqrt{-1}$. De cette équation entre p & q, qu'on cherche premierement p par q, & la réſolution des équations, que je ſuppoſe ici, donnera $p=Q$, où Q ſera une certaine fonction de q. Qu'on cherche enſuite pareillement q par p, pour avoir $q=P$, où P ſera une certaine fonction de p, & ſemblable à la fonction Q au ſigne $\sqrt{-1}$ près. De ces deux valeurs on pourra former une nouvelle équation $p+q-P-Q=0$; ou encore plus généralement $f:p+f:q-f:P-f:Q=0$, où f eſt la marque d'une fonction quelconque; & cette équation renfermera encore la courbe donnée BH.

LXXVII. Or, ſi nous remettons pour p & q leurs valeurs $p=\frac{x+y\sqrt{-1}}{2}$ & $q=\frac{x-y\sqrt{-1}}{2}$, il eſt évident, que cette équation ſera compriſe dans la forme :

$0=$

$$o = \phi:(x+y\sqrt{-1}) + \phi:(x-y\sqrt{-1}) + \frac{1}{\sqrt{-1}}\psi:(x+y\sqrt{-1}) - \frac{1}{\sqrt{-1}}\psi:(x-y\sqrt{-1});$$

ou ſans faire la reſtitution des valeurs p & q, on s'appercevra aiſément, que l'équation : $f:p + f:q - f:P - f:Q = o$, eſt toujours réductible à la forme :

$$\phi:p + \phi:q + \frac{1}{\sqrt{-1}}\psi:p - \frac{1}{\sqrt{-1}}\psi:q = o.$$

Or, ayant réduit l'équation pour la courbe BH à la forme :

$$f:p + f:q - f:P - f:Q = o,$$

toutes les autres courbes EYV, qui repréſentent avec la donnée le mouvement du fluide, ſeront compriſes dans cette équation :

$$f:p + f:q - f:P - f:Q = O$$

en donnant à O ſucceſſivement toutes les valeurs poſſibles.

LXXVIII. Si nous prenons pour f': la marque d'une autre fonction quelconque, la courbe donnée ſera auſſi compriſe dans cette équation plus générale :

$$\left.\begin{array}{l} f:p + f:q - f:P - f:Q \\ + \frac{1}{\sqrt{-1}}f':p - \frac{1}{\sqrt{-1}}f':q + \frac{1}{\sqrt{-1}}f':P - \frac{1}{\sqrt{-1}}f':Q \end{array}\right\} = o,$$

qui ſera encore réductible à la forme :

$$\phi:p + \phi:q + \frac{1}{\sqrt{-1}}\psi:p - \frac{1}{\sqrt{-1}}\psi:q = o.$$

Et alors on aura pour toutes les autres courbes EYV, que le fluide décrit par ſon mouvement, cette équation :

$$\left.\begin{array}{l} f:p + f:q - f:P - f:Q \\ + \frac{1}{\sqrt{-1}}f':p - \frac{1}{\sqrt{-1}}f':q + \frac{1}{\sqrt{-1}}f':P - \frac{1}{\sqrt{-1}}f':Q \end{array}\right\} = O,$$

en donnant à O ſucceſſivement toutes les valeurs poſſibles.

LXXIX.

LXXIX. Par cette réduction générale on voit que, pour la même ligne donnée BH, on peut trouver une infinité de systèmes différens pour les autres courbes EYV, puisque nous pouvons prendre pour les deux marques f, & f' des forces des fonctions quelconques. Il se pourra donc faire que, parmi les autres courbes EYV, il se trouve encore une qui soit donnée. Et cette recherche servira à decouvrir la vraye résistance qu'un corps d'une figure quelconque, placé dans le courant en souffrira; car alors cette autre courbe donnée doit convenir avec la figure du corps. Or, pour trouver la résistance, on n'a qu'à différentier l'équation générale pour les courbes, en supposant O constant, & la comparaison du différentiel avec la forme $u\,dy - v\,dx = 0$, donnera les valeurs de u & v, d'où l'on tire ensuite la vraye vitesse $z = \sqrt{(uu + vv)}$, & de là la pression du fluide à chaque endroit.

LXXX. Cependant il faut que je le répéte encore une fois, que par ce moyen on n'obtiendra point tous les mouvemens possibles pour chaque figure donnée du plan, où le fluide se meut: on ne trouve que les cas, où la formule $u\,dx + v\,dy$ est intégrable, & hormis ces cas il y a encore une infinité d'autres, qui renferment également des mouvemens possibles. On comprend aussi aisément, que quand même la figure du canal, & celle du corps qui y est fixé, est donnée, le cas n'est pas encore déterminé: car le mouvement du fluide pourroit être agité & troublé d'une infinité de manieres différentes, de sorte pourtant que le fluide qui touche les bords du canal, & le corps qui y est fixé, en suive toujours la direction par son mouvement: & cette seule réflexion peut suffire pour nous convaincre, que les formules que je viens de trouver, ne sont pas générales.

Tab. V. ad pag. 316.

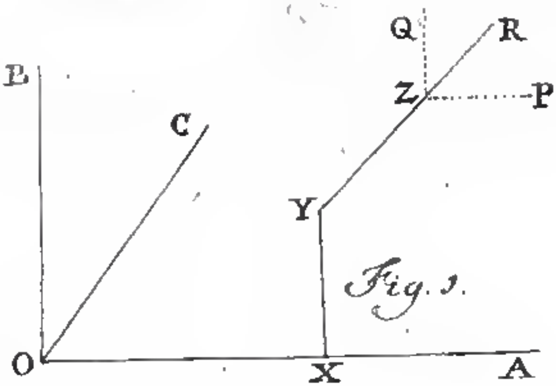

Fig. 1.

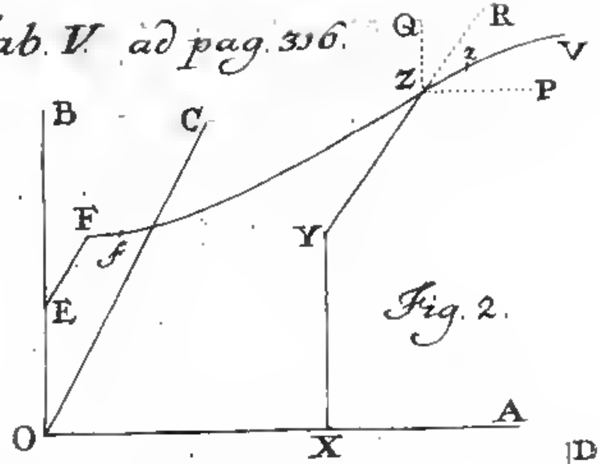

Fig. 2.

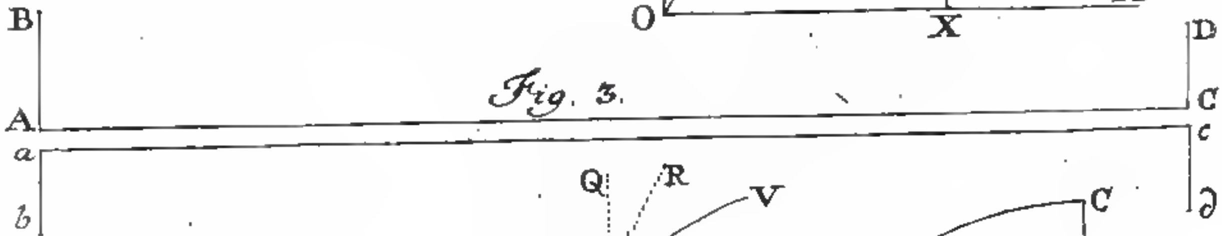

Fig. 3.

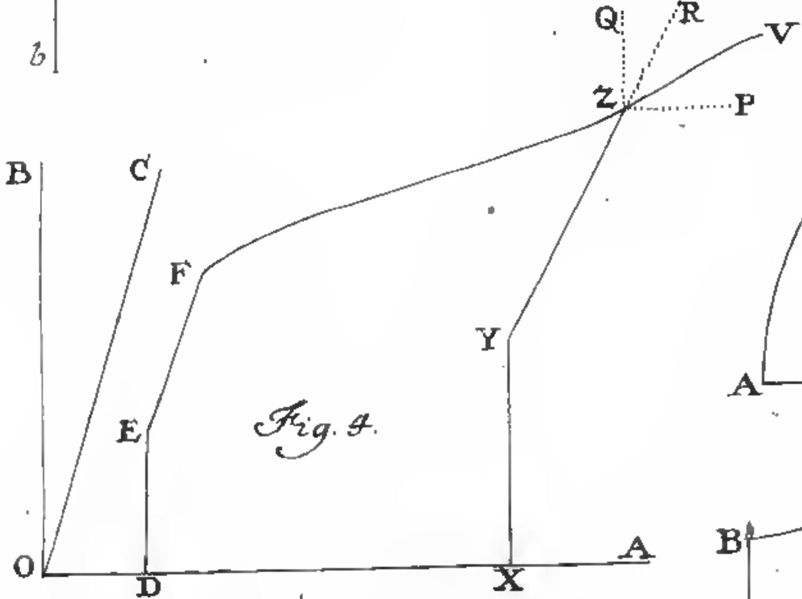

Fig. 4.

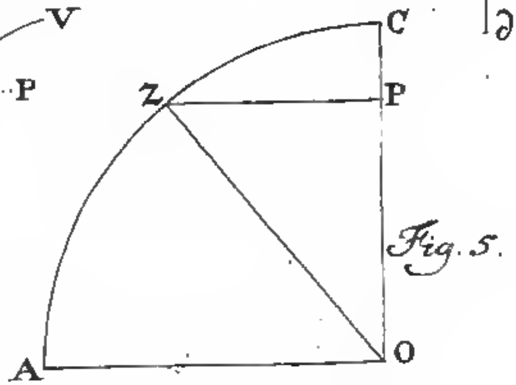

Fig. 5.

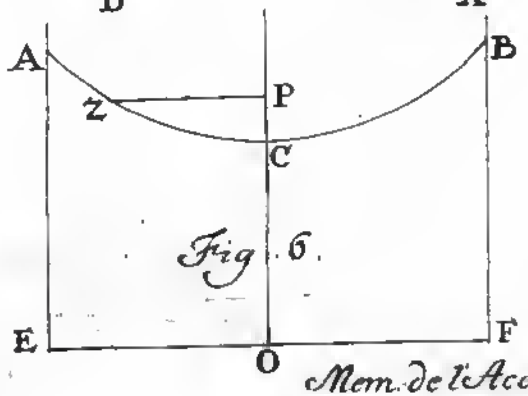

Fig. 6.

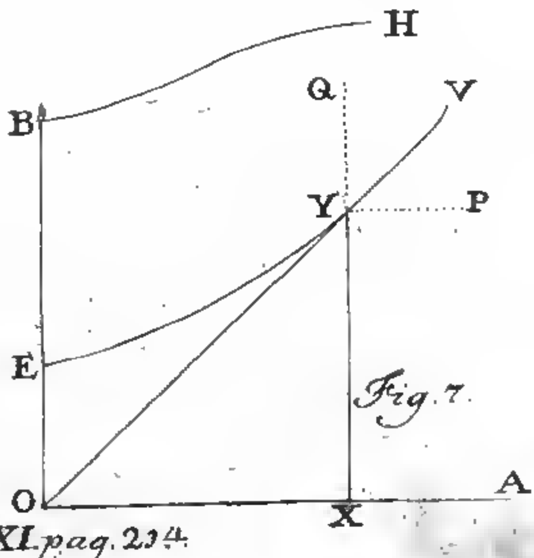

Fig. 7.